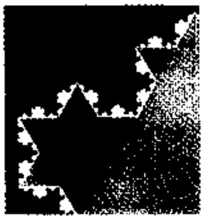
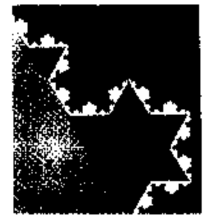


Η νέα επιστημονική



Σαράφογλου Γεώργιος

ΧΑΟΣ

Σκόκος Χάρης

επανάσταση

ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΨΑΡΙΑ

Ενα πολύπλοκο, μη γραμμικό και κατ' εξοχήν χαοτικό σύστημα, είναι το σύστημα του πλανήτη μας. Χιλιάδες εκατομμύρια οργανισμοί, φυτά, ζώα, μικρόβια και πάνω απ' όλα αυτά, ο άνθρωπος, γεννιούνται, αλληλεπιδρούν, επηρεάζοντας το καθένα τη ζωή χιλιάδων άλλων και τελικά πεθαίνουν.

Έτσι λοιπόν η επιστήμη του Χάους δε θα μπορούσε να παραλείψει τη μελέτη των διαφόρων οικοσυστημάτων. Οι οικολόγοι στη δεκαετία του '70, χρησιμοποιώντας απλά μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή της εξέλιξης ενός πληθυσμού, έδωσαν ένα από τα απλούστερα και ομορφότερα παραδείγματα εμφάνισης του Χάους.

Αυτό το παράδειγμα είναι η εξέλιξη του πληθυσμού των ψαριών μιας λίμνης.

Πώς μπορούμε όμως να μελετήσουμε ένα τόσο πολύπλοκο φαινόμενο όπως η ζωή; Ξεκινώντας από ένα δεδομένο αριθμό ψαριών φέτος, πώς μπορούμε να προβλέψουμε την αύξηση ή τη μείωσή του μέσα σ' ένα χρόνο, όταν οι παράγοντες οι οποίοι επιδρούν είναι τόσοι πολλοί (π.χ η γονιμότητα των ψαριών, η ύπαρξη ή όχι τροφής, η εμφάνιση ή όχι ασθενειών, η ύπαρξη ή όχι άλλων ανταγωνιστικών οργανισμών για τους οποίους τα ψάρια του πληθυσμού μας αποτελούν ενδεχομένως την τροφή τους); Όπως πάντα όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πραγματικό πρόβλημα, δημιουργούμε ένα μοντέλο το οποίο να προσεγγίζει την πραγματικότητα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

a=2 ΕΤΗ	xo=0,200	xo=0,400	xo=0,900
1960	0,200	0,400	0,900
1961	0.320	0,800	0,180
1962	0,435	0,499	0,295
1963	0,491	0,500	0,416
1964	0,499	0,500	0,486
1965	0,500	0,500	0,499
1966	0,500	0,500	0,500
1967	0,500	0,500	0,500
1968	0,500	0,500	0,500
1969	0,500	0,500	0,500
1970	0,500	0,500	0,500

Ο πληθυσμός των ψαριών καταλήγει σε ισορροπία (περίοδος 1 έτος). Οι παραπάνω τιμές του πληθυσμού των ψαριών είναι κανονικοποιημένες, δηλαδή ο μέγιστος πληθυσμός αντιστοιχεί στο 1 και η εξαφάνιση στο 0

Έστω ότι X_1 είναι ο πληθυσμός μας φέτος, σ' ένα χρόνο θα γίνει X_2, μετά X_3 κ.ο.κ. Για ευκολία στις πράξεις μας έχουμε τη μεταβλητή Χ κανονικοποιημένη, δηλαδή μπορεί να παίρνει τιμές από 0 (ο πληθυσμός μας εξαφανίζεται) ως 1 (τιμή που αντιπροσωπεύει το μέγιστο δυνατό πλήθος ψαριών). Ψάχνουμε λοιπόν να φτιάξουμε μια εξίσωση διαφορών, όπως ονομάζεται, της μορφής: $X_{n+1} = f(X_n)$ (1) που θα συνδέει τον πληθυσμό μιας χρονιάς X_{n+1}, με αυτόν της προηγούμενης X_n. Η συνάρτηση $f(X_n)$ πρέπει να ικανοποιεί κάποιες απλές απαιτήσεις. Πρέπει f(0)=0 γιατί αν δεν έχουμε καθόλου ψάρια φέτος είναι αδύνατο να έχουμε του χρόνου. Επίσης πρέπει για μικρές τιμές του πληθυσμού X_n να είναι αύξουσα, γιατί θα υπάρχει αρκετή τροφή ώστε να αυξηθεί ο πληθυσμός, αλλά για μεγάλες τιμές του X_n να είναι φθίνουσα, καθώς πολυπληθείς πληθυσμοί συναντούν δυσκολία στην ανεύρεση τροφής με αποτέλεσμα να μειώνονται.

Επίσης πρέπει να υπάρχει μια παράμετρος α η οποία γενικά θα εξαρτάται απ' όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν την εξέλιξη του πληθυσμού. Η παράμετρος αυτή είναι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού.

Υπάρχουν πολλές συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες, εμείς όμως θα αναφερθούμε στη σχέση :

$$X_{n+1}= \alpha\ X_n\ (1-X_n)\quad (2)$$

η οποία είναι γνωστή ως λογιστική απεικόνιση και είχε προταθεί το 1845 από τον P.F. Verhalst.

Αρνητικές τιμές της παραμέτρου α δεν έχουν νόημα αφού θα έδιναν αρνητικό αριθμό ψαριών. Επίσης αν $0 \leq \alpha \leq 1$ ο πληθυσμός θα κατέληγε σε εξαφάνιση μετά από μερικά χρόνια, πράγμα το οποίο δε θα είχε κανένα ενδιαφέρον. Αν λάβουμε επίσης υπόψη μας ότι $0 \leq X_{n+1} \leq 1$ εύκολα αποδεικνύεται ότι $1<\alpha<4$ (απόδειξέ το !).

Αν και η λογιστική απεικόνιση ήταν γνωστή για αρκετές δεκαετίες και πολλοί επιστήμονες (κυρίως βιολόγοι) την είχαν χρησιμοποιήσει, πρώτος ο φυσικός και βιολόγος Robert May, το 1976, τη μελέτησε λεπτομερώς και ήρθε σε επαφή με το χάος που ελλοχεύει στην τόσο απλή μορφή της.

Ο May μελέτησε συστηματικά τα αποτελέσματα της λογιστικής απεικόνισης σε συνάρτηση με την αλλαγή της παραμέτρου α. Αρχικά χρησιμοποίησε μικρές τιμές του α κοντά στην τιμή του 1 και είδε ότι ξεκινώντας από οποιαδήποτε "αρχική συνθήκη", δηλαδή οποιονδήποτε αρχικό πληθυσμό, κατέληγε, μετά από μερικά χρόνια, σε μια σταθερή τιμή του πληθυσμού, την ίδια πάντα.

Αυτό συνέβαινε όταν $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=3$ που σημαίνει ότι ο πληθυσμός κατέληγε πάντα σε μια σταθερή κατάσταση η οποία δεν άλλαζε με την πάροδο των ετών (πίνακας 1).

Όταν η τιμή του α έγινε λίγο μεγαλύτερη απ' το 3, όποια αρχική συνθήκη και αν χρησιμοποιούσε, αργά ή γρήγορα κατέληγε σε μια ταλάντωση του πληθυσμού του, μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών, δηλαδή κάθε δύο χρόνια είχαμε τον ίδιο πληθυσμό. Λέμε λοιπόν ότι έχουμε μια ταλάντωση με περίοδο 2 έτη. Κάθε αρχική κατάσταση κατέληγε σε περίοδο 2 ετών όταν:

$\alpha_2=3$, $\alpha_3= 1+\sqrt{6}$, $\alpha_2<\alpha<\alpha_3$ (πίνακας 2).

Μόλις το α πέρασε αυτή την τιμή, κάθε αρχική συνθήκη κατέληγε σε περιοδική τροχιά περιόδου 4 ετών.

Βλέπουμε λοιπόν ότι καθώς αυξάνει η τιμή του α έχουμε μια ακολουθία διπλασιασμού περιόδων, καταλήγουμε σε καταστάσεις περιόδου 2,4,8,16... έτη ή αλλιώς 2^n έτη, όπου n= 0,1,2,3... Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον, μέχρι κάποια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου α που ονομάζεται "σημείο συσσώρευσης" α_∞=3,5700...

Πάνω απ' αυτήν την τιμή παρατηρούμε μια πολύπλοκη κατάσταση: ο πληθυσμός δε φαίνεται να ακολουθεί κάποιο κύκλο, έστω και μεγάλης περιόδου, αλλά παίρνει ακανόνιστες τιμές, και όσα χρόνια κι αν περάσουν δεν ξαναέχουμε τον ίδιο πληθυσμό. Μια τέτοια κατάσταση ονομάζεται χαοτική.

Αν ξεκινήσουμε με δύο "αρχικές συνθήκες" που διαφέρουν μεταξύ τους ελάχιστα, π.χ. στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο, θα έχουμε τόσο διαφορετική εξέλιξη στο χρόνο, ώστε μετά από μερικά χρόνια, οι πληθυσμοί να διαφέρουν αρκετά (πίνακας 3). Άρα λοιπόν χάος σημαίνει τρομερή ευαισθησία στις αρχικές

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

α=3.3

ΕΤΗ	xo=0,200	xo=0,400	xo=0,800
1960	0,200	0,400	0,800
1961	0.528	0,791	0,528
1962	0,822	0,543	0,822
1963	0,481	0,818	0,482
1964	0,823	0,489	0,824
1965	0,478	0,824	0,478
1966	0,823	0,477	0,823
1967	0,479	0,823	0,479
1968	0,823	0,479	0,823
1969	0,479	0,823	0,479
1970	0,823	0,479	0,823

Ο πληθυσμός των ψαριών ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο τιμές (περίοδος 2 έτη) συνθήκες, δηλαδή μια πολύ μικρή αλλαγή της αρχικής συνθήκης οδηγεί σε εντελώς διαφορετική εξέλιξη του συστήματός μας.

Καθώς όμως αυξάνει ακόμα η τιμή της παραμέτρου μέσα στη χαοτική περιοχή, εμφανίζονται ξαφνικά "παράθυρα" με κανονικές περιόδους π.χ. 7,6,5,3... έτη. Και αυτοί οι περιοδικοί κύκλοι σύντομα ακολουθούν διαδικασία διπλασιασμού περιόδων, όπως για παράδειγμα 3, 6,12, 24... ή γενικά $3\text{-}2^n$ n=0,1,2...

Ο Mitchell Feigenbaum ανακάλυψε ότι η διαδικασία διπλασιασμού περιόδων ακολουθεί τον εξής νόμο:

$$a_n=a_\infty-cq^{-n} \quad n=1,2,...$$

όπου c=2,6327... και q=4,669202... (Το q ονομάζεται σταθερά Feigenbaum)

Η σχέση αυτή σημαίνει, οι διαφορές των τιμών της παραμέτρου d οπου εμφανίζονται οι διπλασιασμοί περιόδου ελαττώνονται με σταθερό ρυθμό.

Βλέπουμε λοιπόν ότι οδεύουμε προς το χάος με μια τάξη, με έναν σταθερό ρυθμό. Αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι το διάγραμμα του σχήματος 1 επαναλαμβάνεται το ίδιο κάτω από κατάλληλες μεγεθύνσεις, παρουσιάζει δηλαδή "αυτοομοιότητα"

Το εκπληκτικό είναι ότι αν και το q υπολογίστηκε αρχικά για τη λογιστική απεικόνιση είναι μια "παγκόσμια" σταθερά. Εμφανίζεται σ' όλες τις απεικονίσεις της γενικής μορφής (1) όπου συμβαίνει η διαδικασία διπλασιασμού περιόδων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

a=3,7

ΕΤΗ	xo=0,900	xo=0,901	xo=0,902
1960	0,900	0,901	0,902
1961	0.333	0,330	0,327
1962	0,82	0,818	0,814
1963	0,54	0,550	0,559
1964	0,918	0,915	0,912
1965	0,276	0,286	0,297
1966	0,740	0,755	0,772
1967	0,710	0,683	0,649
1968	0,761	0,801	0,841
1969	0,672	0,589	0,492
1970	0,814	0,895	0,924
1971	0,558	0,346	0,257
1972	0,912	0,838	0,707
1973	0,296	0,501	0,766
1974	0,771	0,924	0,662
1975	0,653	0,256	0,827

Είδαμε λοιπόν ότι ένα απλό εκ πρώτης όψεως μοντέλο κρύβει μια αξιοθαύμαστη πολυπλοκότητα, επομένως δεν είναι ανάγκη να αντιμετωπίσουμε πολύπλοκα προβλήματα και να λύσουμε δύσκολες εξισώσεις· το χάος βρίσκεται δίπλα μας!!!

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Μπούντης Αν: "Δυναμικά συστήματα και Χάος" Εκδ. Α. Βούλγαρη. Πάτρα (1989)

2) Μπούντης Αν: "Τρόποι μετάβασης στο Χάος" στο "ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΧΑΟΣ στα μη γραμμικά Δυναμικά συστήματα" Τόμος ΙΙ (1989)

3) Gleickj: "Χάος: Μια νέα επιστήμη" Εκδ. Κάτοπτρο (1991)

4) Briggs J, Fecet F.D.: "Ο Ταραγμένος καθρέπτης". Εκδ. Κάτοπτρο (1991)

5) Verhulst F: "Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems" Springer - Verlag (1990)

6) Schuster H. G. "Deterministic Chaos" Physic Verlag (1986)

7) Lichtenberg A. J. - Lieberman M. A: "Regular and Stochastic motion" Springer - Verlag (1983)

8) Baker G.L. - Gollub J. P.: "Chaotic dynamics an introduction" Cambridge University press (1990)

9) May R: Nature 261 (1976): 459

Χαοτική περιοχή: Ξεκινώντας από παραπλήσιες αρχικές συνθήκες μετά από 15 έτη καταλήγουμε σε τελείως διαφορετικούς πληθυσμούς ψαριών